

Barem clasa a X-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

Aplicăm inegalitatea lui Jensen funcției f , $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = tg^2 x$ (5 p)

$$f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \leq \frac{f(A)+f(B)+f(C)}{3}, \text{ de unde } tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geq 3tg^2\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \Rightarrow$$
$$tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geq 3tg^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C \geq 9. \quad (10 \text{ p})$$

Egalitatea are loc pentru $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. (5 p)

Subiectul II. (30 puncte)

$$13^{x^2} \cdot 25^{x^2+2x+\frac{3}{2}} \cdot 31^{x^2+x+1} = 2015 / : (13 \cdot 5 \cdot 31) \Rightarrow \quad (10 \text{ p})$$

$$13^{x^2-1} \cdot 25^{x^2+2x+1} \cdot 31^{x^2+x} = 1 \Leftrightarrow 13^{(x+1)(x-1)} \cdot 25^{(x+1)^2} \cdot 31^{x(x+1)} = 1 \Leftrightarrow [13^{x-1} \cdot 25^{x+1} \cdot 31^x]^{(x+1)} = 1. \quad (10 \text{ p})$$

Logaritmăm ambii membri: $(x+1) \cdot \lg(13^{x-1} \cdot 25^{x+1} \cdot 31^x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ și $(x-1) \cdot \lg 13 + (x+1) \cdot \lg 25 + x \cdot \lg 31 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\lg 13 - \lg 25}{\lg 13 + \lg 25 + \lg 31}. \quad (10 \text{ p})$$

Subiectul III. (20 puncte)

$$\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{n+1}{2} \quad (10 \text{ p})$$

$$\Rightarrow \log_n \frac{n+1}{2} > \log_n \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n} \quad (10 \text{ p})$$

Subiectul IV. (20 puncte)

Aflarea rădăcinilor ecuației binome $z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}$, $k \in \{0,1,2,3\}$ și reprezentarea lor (15 p)

Imaginile geometrice ale rădăcinilor ecuației sunt vârfurile unui pătrat înscris în cercul unitate, ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate. (2 p)

Axele de coordonate împart pătratul $M_1 M_2 M_3 M_4$ în patru pătrate de latură $\frac{\sqrt{2}}{2}$ și diagonale egale cu 1, deci distanța maximă dintre două puncte $P_i(z_i), P_j(z_j)$ aflate în interiorul unui astfel de pătrat este $|z_i - z_j| < 1$ (2 p)

Cum avem 5 puncte, există două care se află într-un astfel de pătrat (principiul cutiei) (1 p)